جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

آمار ریاضی (سری ۲)

۱- فرض کنید $X_1, \dots, X_{16}$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع $N(\mu, 100)$ باشد و $\bar{x}=113.5$، فرض $H_0: \mu=110$ را مقابل فرض $H_1: \mu>110$ با $\alpha=\%5$ و نیز $\alpha=\%1$ بیازمایید.

۲- سؤال ۱ را با $H_1: \mu<110$ انجام دهید.

۳- سؤال ۱ را با $H_1: \mu\neq 110$ انجام دهید.

۴- فرض کنید $X_1, \dots, X_{16}$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد و $\bar{x}=10.4$ و $S=0.4$. فرض سادهٔ $H_0: \mu=10.1$ را مقابل فرض مرکب $H_1: \mu>10.1$ می‌آزماییم. آیا فرض H_0 را با $\alpha=\%5$ قبول یا رد کنیم؟

۵- سؤال ۴ را با $H_1: \mu<10.1$ انجام دهید.

۶- سؤال ۴ را با $H_1: \mu\neq 10.1$ انجام دهید.

۷- فرض کنید X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n=400$ و p باشد. می‌خواهیم فرض $H_0: p=p_0=0.43$ را مقابل فرض $H_1: p\neq p_0$ بیازماییم. هرگاه نصف مقادیر مشاهده‌شده موفقیت باشد آیا H_0 با $\alpha=\%1$ رد می‌شود؟

۸- سؤال ۷ را با $H_1: p>p_0$ انجام دهید.

۹- سؤال ۷ را با $H_1: p<p_0$ انجام دهید.

۱۰- فرض کنید $X_1, \dots, X_{13}$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد و $s^2=9.88$. آیا فرض $H_0: \sigma^2=25$ مقابل فرض $H_1: \sigma^2<25$ با $\alpha=\%5$ رد می‌شود؟

۱۱- سؤال ۱۰ را با $H_1: \sigma^2>25$ انجام دهید.

۱۲- سؤال ۱۰ را با $H_1: \sigma^2\neq 25$ انجام دهید.

آمار و احتمال مهندسی (پایان ترم - سری اول)

سایت آمار ریاضی (سری اول)

۱. هرگاه $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی با تابع چگالی احتمال $f_\theta(x)$ باشد برآوردکنندهٔ درستنمایی ماکسیمم θ و نیز برآوردکنندهٔ گشتاوری θ را در هر یک از حالات زیر بدست آورید:

الف) $f_\theta(x) = \theta^x e^{-\theta}/x! \quad , \quad x = 0, 1, 2, \ldots \quad , \theta > 0$

ب) $f_\theta(x) = \theta x^{\theta - 1} \quad , \quad 0 < x < 1 \quad , \theta > 0$ (سایر نقاط $f_\theta(x) = 0$)

ج) $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \quad , \quad 0 < x < \infty \quad , \quad 0 < \theta < \infty$

د) $f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)} \quad , \quad \theta \le x < \infty \quad , \quad -\infty < \theta < \infty$

۲. فرض کنید $X_1, \ldots, X_{20}$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع نرمال $N(\mu, 80)$ باشد. هرگاه $\bar{x} = 81.2$ یک بازهٔ اطمینان 0.95 برای μ بدست آورید.

۳. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع $N(\mu, 9)$ باشد. n را طوری بیابید که به طور تقریبی $P(\bar{X} - 1 < \mu < \bar{X} + 1) = 0.9$.

۴. فرض کنید $X_1, \ldots, X_{17}$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد که $\bar{x} = 4.7$ و $s^2 = 5.76$. یک بازهٔ اطمینان ۹۰ درصد برای μ بدست آورید.

۵. دو نمونهٔ تصادفی مستقل هر یک از اندازهٔ ۱۰ و از توزیع های $N(\mu_1, \sigma^2)$ و $N(\mu_2, \sigma^2)$ مقادیر $\bar{x} = 4.8$ ، $s_1^2 = 8.64$ ، $\bar{y} = 5.6$ و $s_2^2 = 7.88$ را بدست می دهد. یک بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای $\mu_1 - \mu_2$ بدست آورید.

۶. فرض کنید $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ میانگین های دو نمونهٔ تصادفی مستقل، هر یک از اندازهٔ n، از توزیع های به ترتیب $N(\mu_1, \sigma^2)$ و $N(\mu_2, \sigma^2)$ باشند که در آن σ^2 معلوم است. n را طوری بیابید که

$$P\left(\bar{X} - \bar{Y} - \frac{\sigma}{5} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{X} - \bar{Y} + \frac{\sigma}{5}\right) = 0.9$$

۷. هرگاه ۸٫۷ ، ۷٫۹ ، ۸٫۳ ، ۶٫۴ ، ۸٫۴ ، ۹٫۸ ، ۷٫۲ ، ۷٫۸ و ۷٫۵ مقادیر مشاهده شده یک نمونهٔ تصادفی اندازه ۹ از توزیع $N(8, \sigma^2)$ باشد یک بازهٔ اطمینان ۹۰ درصد برای σ^2 بیابید.

۸. مقادیر به دست آمده برای میانگین و واریانس یک نمونهٔ تصادفی اندازه ۱۵ از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ به ترتیب $\bar{x} = 3.2$ و $s^2 = 4.24$ هستند. یک بازهٔ اطمینان ۹۰ درصد برای σ^2 به دست آورید.

۹. فرض کنید دو نمونهٔ تصادفی مستقل به اندازه های $n = 16$ و $m = 10$ از دو توزیع $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ و $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ به ترتیب مقادیر $\bar{x} = 3.6$ ، $s_1^2 = 4.14$ و $\bar{y} = 13.6$ و $s_2^2 = 7.26$ را برای میانگین و واریانس نمونه های تصادفی به دست دهد. یک بازهٔ اطمینان ۹۰ درصد را برای σ_1^2/σ_2^2 بیابید هرگاه μ_1 و μ_2 مجهول باشند.

۱۰. فرض کنید s_1^2 و s_2^2 به ترتیب واریانس های نمونه های تصادفی اندازه های n و m از دو توزیع $N(\mu_1, \sigma^2)$ و $N(\mu_2, \sigma^2)$ باشند. از اینکه $(n s_1^2 + m s_2^2)/\sigma^2$ دارای توزیع χ^2 با $n+m-2$ درجهٔ آزادی است استفاده نموده تا یک بازهٔ اطمینان برای σ^2 بیابید.

احتمال و آمار مهندسی

۱- اگر پیشامدهای A و B مستقل با احتمال مثبت باشند نشان دهید $A \cap B \neq \Phi$

۲- فرض کنید S یک فضای نمونه باشد و $A \subset S$ و $B \subset S$. اگر $P(A) > 0$ نشان دهید

$$B \subset A \Longrightarrow P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)} \quad , \quad A \subset B \Longrightarrow P(B|A) = 1$$

۳- کیسه ۱ شامل ۳ توپ قرمز و ۷ توپ آبی و کیسه ۲ شامل ۶ توپ قرمز و ۴ توپ آبی است. یک کیسه به طور تصادفی انتخاب و یک توپ از آن برداشته می‌شود.

الف) احتمال آن که توپ قرمز باشد را محاسبه کنید

ب) با فرض این که توپ برداشته شده قرمز باشد احتمال شرطی که آن توپ از کیسه دوم باشد را محاسبه کنید.

۴- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال $P(x) = c\left(\frac{2}{3}\right)^x , x = 1, 2, \ldots$ (۰ در سایر نقاط) باشد، c را بیابید.

۵- هرگاه X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2) , & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

باشد الف) مقدار c را بیابید

ب) تابع توزیع X را به دست آورید و با استفاده از آن $P(0 < X < \frac{1}{2})$ را محاسبه کنید.

۶- هرگاه متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{1}{3} & -1 \leq x < 0 \\ \frac{2}{3} & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

باشد میانگین، واریانس و $E(e^{2X+1})$ را محاسبه کنید.

۷- برای هریک از توابع چگالی احتمال X زیر $P(|X| < 1)$ و $P(X^2 < 9)$ را محاسبه کنید.

الف) $f(x) = \frac{x^2}{18} \quad , \quad -3 < x < 3$ (۰ سایر نقاط)

ب) $f(x) = \frac{x+2}{18} \quad , \quad -2 < x < 4$ (۰ سایر نقاط)

۸- هرگاه $f(x) = \frac{1}{x^2}$ به ازای $1 < x < \infty$ و ۰ در سایر نقاط تابع چگالی احتمال X باشد و $A_1 = (1, 2)$ و $A_2 = (4, 5)$ محاسبه کنید

$P(A_1 \cup A_2) \quad , \quad P(A_1 \cap A_2)$

۹. هرگاه $x=1,2,3,4,5$ و $P(X)=\frac{x}{15}$ تابع احتمال X باشد محاسبه کنید

$P(X=1 \text{ یا } X=2)$ ، $P(\frac{1}{2}<X<\frac{5}{2})$ و $P(1\leq X\leq 2)$

۱۰. فرض کنید X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n=50$ و $p=\frac{1}{25}$ باشد.

الف) $P(X\leq 1)$ را بیابید.

ب) $P(X\leq 1)$ را با استفاده از تقریب پواسن بیابید.

۱۱. هرگاه X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n=2$ ، $p=\alpha$ و Y دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n=4$ ، $p=\alpha$ باشد و $P(X\geq 1)=\frac{5}{9}$ محاسبه کنید $P(Y\geq 1)$.

۱۲. هرگاه X دارای توزیع یکنواخت $[2,10]$ باشد، میانگین و واریانس X و $E((X+2)^3)$ را بیابید.

۱۳. هرگاه X دارای توزیع نمایی با پارامتر ۲ باشد $P(|X|\leq 2)$ را بیابید.

۱۴. هرگاه X دارای توزیع $N(75,100)$ باشد $P(X<60)$ و $P(70<X<100)$ را بیابید.

۱۵. هرگاه X دارای توزیع $N(\mu,\sigma^2)$ باشد a را به گونه‌ای بیابید که

$P(-a<\frac{X-\mu}{\sigma}<a)=0/9$.

۱۶. هرگاه X دارای توزیع $N(\mu,\sigma^2)$ باشد به گونه‌ای که

$P(X<89)=0/9$ و $P(X<94)=0/95$

مقادیر μ و σ^2 را به دست آورید.

$P(x,y)$	0	1	2	3	4
0	/۰۵	/۱	/۱	/۰۴	/۱
1	/۰۵	/۲	/۱	/۰۳	/۲
2	/۰۵	/۱	/۰۵	/۰۵	/۰۵

۱۷. فرض کنید X و Y دارای تابع احتمال توأم تعریف شده در جدول روبرو باشند. الف) $P(X>2, Y>1)$ و $P(Y\leq 1)$ را بیابید. ب) توابع احتمال کناری X و Y را به دست آورید. ج) $P(Y=0|X=0)$ را محاسبه کنید. د) آیا X و Y مستقل هستند؟ ه) $E(X-Y)$ و $E(XY)$ را محاسبه کنید. و) ضریب همبستگی X و Y را به دست آورید. ز) تابع مولد گشتاور X و Y را به دست آورید.

۱۸. هرگاه $f(x_1|x_2) = c_1 x_1 / x_2^2$ ، $0 < x_1 < x_2$ ، $0 < x_2 < 1$ (۰ در سایر نقاط) و $f_2(x_2) = c_2 x_2^4$ ، $0 < x_2 < 1$ (۰ در سایر نقاط) آنگاه الف) c_1 و c_2 را بیابید. ب) تابع چگالی احتمال توأم X_1 و X_2 را بیابید. ج) $P(\frac{1}{4} < X_1 < \frac{1}{2} | X_2 = \frac{5}{8})$ را محاسبه کنید. د) $P(\frac{1}{4} < X_1 < \frac{1}{2})$ را محاسبه کنید.

۱۹. نشان دهید متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 با تابع چگالی احتمال توأم زیر مستقل هستند:
$f(x_1, x_2) = 12 x_1 x_2 (1 - x_2)$ ، $0 < x_1 < 1$ ، $0 < x_2 < 1$ ($f(x_1, x_2) = 0$ در سایر نقاط)

۲۰. نشان دهید متغیرهای تصادفی گسسته X_1 و X_2 با تابع احتمال توأم زیر مستقل هستند:
$P(x_1, x_2) = 1/16$ ، $x_1 = 1, 2, 3, 4$ ، $x_2 = 1, 2, 3, 4$ ($P(x_1, x_2) = 0$ در سایر نقاط)

۲۱. هرگاه X_1، X_2، ...، X_{10} یک نمونه تصادفی از توزیع پواسون با پارامتر ۱ باشد $P(\bar{X} > 1.5)$ را محاسبه، مقدار جواب خود را با تقریب نرمال مقایسه کنید.

۲۲. فرض کنید X_1، X_2، ...، X_{15} یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال
$f(x) = 3x^2$ ، $0 < x < 1$ ($f(x) = 0$ در سایر نقاط)
باشد. $P(0.6 < (\sum_{i=1}^{15} X_i)/15 < 0.8)$ را با استفاده از قضیه حد مرکزی به طور تقریبی محاسبه کنید.

مسائل اضافی(آمار احتمال مهندسی)

۱-سرایداری یک دسته کلید ۸ تایی برای باز کردن در ۸ اتاق دارد که هر کلید تنها در یک اتاق را باز میکند.اگر در ۴۰% از این اتاق ها قفل نباشد و او ۳ کلید را به طور تصادفی همراه آورده باشد؛ احتمال اینکه او بتواند وارد اتاق شود را بیابید.

۲-یک آزمایشگاه تشخیص سرطان با احتمال ۵% برای بیماران غیر سرطانی پاسخ مثبت و با احتمال ۹۹% برای بیماران سرطانی پاسخ مثبت میدهد.از بین بیماران یک بیمارستان که ۷% آنها سرطانی هستند بیماری را به تصادف انتخاب کرده و آزمایش روی وی مثبت نشان داده شده است.احتمال اینکه بیمار سرطانی باشد چقدر است؟

۳-خانواده ای ۳ فرزند دارد.اگر فرزند اول و آخر از یک جنس باشند؛ احتمال همجنس بودن تمام فرزندان را بیابید.